Задание № 22 Дифференциальные уравнения первого порядка

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

29.4 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Д29.4.1 Определение: Уравнение вида  называется *уравнением с разделенными переменными*.

Д29.4.2 Определение. Дифференциальные уравнения вида  или вида  называются *уравнениями с разделяющимися переменными*.

Для решения уравнения  необходимо поделить его на  и будет получено уравнение с разделенными переменными. Тот же прием применяется при решении уравнения : , .

Д29.4.3 *Замечание:* При делении могут быть потеряны решения, поэтому после деления на переменную величину необходима проверка.

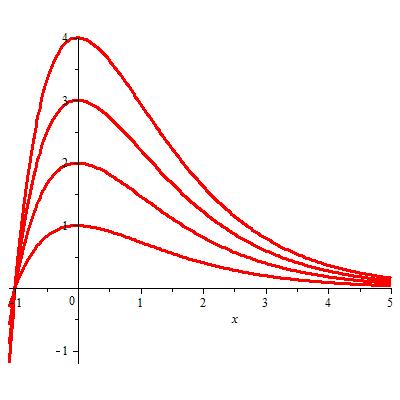
Д29.4.4 Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения 

*Решение*: 

Добьемся того, чтобы в левой части равенства отсутствовала переменная , а в правой части – переменная . Для этого поделим все уравнение на :



Возьмем интегралы от обеих частей уравнения: 

. Вместо постоянной С для удобства написали постоянную lnC.



; 

; ; .

Несколько интегральных кривых показаны на рисунке.

Д29.4.5 Пример 2. Решить задачу Коши , 

*Решение:* Найдем общее решение уравнения. ,

; ; ;

. Это равенство можно считать общим решением (в виде неявной функции). Поскольку при решении уравнения производилось деление на переменные величины  и , то необходимо поверить, не являются ли функции  и  решениями дифференциального уравнения. Если , то  и . При подстановке в уравнение  и  получим тождество, значит,  - еще одно решение дифференциального уравнения. Если , то  и при подстановке этих значений в уравнение тождество не получается.

Теперь воспользуемся условием . Для этого в общее решение вместо переменной  подставим число 0, а вместо  - число 1:



Значит,  и это значение подставляем в общее решение: ; .

29.5 Однородные дифференциальные уравнения

**Д29.5.1 Определение.** Функция  называется *однородной функцией порядка*  относительно переменных  и , если для любого числа , при котором  и  принадлежат области определения функции , выполняется равенство .

**Д29.5.2 Определение.** Функция  называется *положительно однородной функцией порядка*  относительно переменных  и , если для любого числа , при котором  и  принадлежат области определения функции , выполняется равенство .

**Д29.5.3 Примеры:** 1. Функция  является однородной функцией третьего порядка: ;

2. Функция  является положительно однородной функцией первого порядка: ;

3. Функция  является однородной функций нулевого порядка: ;

**Д29.5.5 Определение**. Дифференциальное уравнение первого порядка  называется *однородным дифференциальным уравнением*, если  являются однородными или положительно однородными функциями одинакового порядка.

**Д29.5.6** Однородные дифференциальные уравнения всегда можно привести к виду  и, используя замену переменной , прийти к уравнению с разделяющимися переменными вида .

**Д29.5.7 Пример 1.** Найти общее решение уравнения .

*Решение:*  и  - однородные функции первого порядка. Поэтому находим общее решение дифференциального уравнения как однородного с помощью подстановки  . Подставляя полученные выражения для функции  и ее дифференциала, получим (при ): ; ; ; ; ; ; ; .

29.6 Линейные дифференциальные уравнения

**Д29.6.1 Определение.** Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если в его состав переменная  и ее производная входят только в первой степени, т.е. линейное уравнение сводится к виду , где  - заданные функции, не зависящие ни от , ни от ее производной. Если , то уравнение называется *линейным однородным* Если , то уравнение называется *линейным неоднородным*.

*Замечание.* Линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка является уравнением с разделяющимися переменными.

**Д29.6.4 Метод подстановки.** Общее решение неоднородного уравнения  представляем в виде , где  - две новые неизвестные функции, для определения которых необходимо последовательно решить два дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными -  и , причем в первом уравнении находим только одно (любое) частное решение, во втором – общее решение.

**Д29.6.5 Пример**. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения  методом подстановки.

*Решение.* Общее решение будем искать в виде . После замены переменной получаем . Полагая равным нулю выражение в скобках, получим систему дифференциальных уравнений в виде . Находим частное решение первого уравнения: ; ; ; ; . Найденное частное решение подставляем во второе уравнение и решаем его: ; ; ;

Для нахождения  используем метод подведения части подынтегральной функции под знак дифференциала: ; Второй интеграл находим интегрированием по частям:



. .

Окончательно получим общее решение: 

**29.7 Уравнение Бернулли**

**Д29.7.1 Определение.** *Уравнением Бернулли* называется дифференциальное уравнение вида , где .

**Д29.7.2** Общее решение представляем в виде произведения двух неизвестных функций , которые находятся последовательным решением дифференциальных уравнений  и .

**Д29.7.3 Пример.** Найти общее решение уравнения .

*Решение.* Общее решение ищем в виде . Неизвестные функции ,  находим из системы уравнений . Решение уравнения  было получено ранее: (см. Пример ).

Подставляем найденную функцию во второе уравнение системы: ;

; ; ; ; ; .

Общее решение уравнения имеет вид .

**29.8 Уравнение в полных дифференциалах**

**Д29.8.1 Определение.** Уравнение  называется уравнением в полных дифференциалах, если существует функция , для которой .

**Д29.8.2** *Замечание.* Из теоремы о совпадении смешанных производных (М28.1.4) следует, что необходимым и достаточным признаком того, что выражение  является полным дифференциалом, является тождественное равенство . Метод нахождения функции  по ее полному дифференциалу  также известен из математического анализа.

**Д29.8.3 Пример.** Убедившись, что дифференциальное уравнение  является уравнением в полных дифференциалах, решить его.

*Решение.* Проверим признак полного дифференциала: , .

Интегрируем: , где  - пока неизвестная функция одной переменной .

Из уравнения в полных дифференциалах следует, что . Из полученного выше равенства  следует, что . Приравнивая эти два выражения, получим , откуда . Интегрируя, получаем , где  - произвольная постоянная. Значит, . Общее решение дифференциального уравнения дается формулой .

**Самостоятельная работа:**

18.3.2.Найти общие и особые решения дифференциальных уравнений: а) ; б) ; в) ; г); д) ; е) ;

18.3.3. Решить задачу Коши: а)  б); в) ;

18.4.3. Найти общее решение однородных дифференциальных уравнений:

а) ; б) ; в) ; г) ;

д) ; е) ;

18.5.2. Решить линейные уравнения: а) ; б) ; в) ;

18.5.3. Решить уравнения Бернулли: а) ; б) ; в) ; г) 

**Ответы:**

**18.3.2.** а) Общее решение - особое решение - ; б) Общее решение - особое решение - ; в) Общее решение - особое решение - ; г) Общее решение - особых решений нет; д) Общее решение - особое решение - ; е) Общее решение - особых решений нет; **8.3.3.** а)  б); в) ;

**18.4.3.** а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ;

**18.5.2.** а) ; б) ; в) ;

**18.5.3**. а) ; б) ; ; в) ; г) ;